УДК 52-17:519.254

В. М. Журавлев, С. В. Фундаев

ВЫЧИСЛЕНИЕ СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ СИГНАЛА С ПОМОЩЬЮ АНТЕННОЙ РЕШЕТКИ ПЕРЕМЕННОЙ КОНФИГУРАЦИИ[1]

Аннотация. Рассматривается задача вычисления спектральной плотности волнового процесса на основе данных от антенной решетки переменной конфигурации. Такая антенна представлет собой совокупность точеных датчиков, которые движутся в пространстве с постоянными скоростями относительно лабораторной системы отсчета и относительно друг друга. Предложен способ преобразования исходных данных, позволяющий устранять неоднородный доплеровский сдвиг в отдельных узлах решетки. Предложена реализация такой вычислительной процедуры для случая дискретных временных рядов.

Ключевые слова: многомерный спектральный анализ сигналов, пространственно-временной спектр, антенные решетки переменной конфигурации, метод главных нормальных мод, оценивание спектральной плотности.

Abstract. The problem of calculation of spectral density of wave process are represented in this work on base of data from antenna array with variable configuration. This antenna array is an aggregate sensing elements moving in space with constant velocities related to laboratory frame system and related one another. The new way of transformation an initial data set obviated difficulties with inhomogeneous Dopler's shifts in antenna nodes are suggested. The some realization of such method for a discreet time series are represented.

Keywords: multidimensional spectral analysis of signals, spatial-temporary spectra, antenna array with variable configuration, the method of normal principal components, an estimation of spectral densities.

Введение

Одним из самых эффективных методов анализа характеристик динамики волновых процессов на основе экспериментальных данных в различных физических системах являются методы спектрального анализа временных рядов и связанные с ними методы оценивания пространственно-временных спектров с помощью дискретных антенных решеток [1, 2]. Такой спектральный анализ нашел широкое применение в задачах радио- и акустической локации объектов, в изучении волновых процессов дистанционными методами в океане и атмосфере, а также во многих задачах космофизики, астрофизики и астрономии. Одним из основных элементов такого подхода является стационарная антенная решетка, состоящая из сравнительно небольшого числа точечных узлов, в которых расположены датчики, измеряющие изме-

[1] Работа выполнена в рамках проекта, поддержанного Российским фондом фундаментальных исследований (проект 08-01-97013-р_поволжье_а).

няющийся во времени физический параметр, служащий индикатором волнового процесса. Таким индикатором может быть любой физический параметр, например, напряженности магнитного и электрического полей, давление в среде, температура, интенсивность потоков заряженных частиц и т.п.

Обычно считается, что дискретная антенная решетка должна обладать набором прецизионных свойств. Расстояния между узлами антенной решетки, называемые базами, должны быть известны с максимально возможной точностью. Также предполагается, что сигналы в узлах антенной решетки измеряются синхронно с максимально возможной точностью. Ошибки в синхронизации измерений и в определении расстояний между элементами антенной решетки определяют точность нахождения углового положения источников сигналов. Максимальное расстояние между узлами антенной решетки называется ее апертурой и определяет разрешающую способность по углу антенной решетки. Оценивание длины волны гармонического сигнала на заданной частоте и направления его прихода [1–3] формально основано на простом вычислении фазовых сдвигов этого сигнала между узлами a, b антенной решетки с помощью системы уравнений:

$$(k,(x_a - x_b)) = \Delta\varphi_{ab}(\omega), \tag{1}$$

где $k = k(\omega)$ – волновой вектор на частоте ω; x_a – радиус-вектор положения узла антенной решетки с номером a; $\Delta\varphi_{ab}(\omega)$ – сдвиг фаз между узлами a и b.

Реально же из-за наличия шума в окружающей среде и различного рода случайных ошибок, воспринимаемых как шум, задача оценивания длин волн и направлений их прихода на фиксированной частоте усложняется и решается с помощью процедур спектрального оценивания [1, 2]. Такой подход хорошо развит и используется в различных прикладных задачах.

Вместе с тем во многих современных задачах возникает необходимость обрабатывать наборы данных от датчиков, которые не составляют антенную решетку в указанном выше смысле, например, непрерывно перемещаются в пространстве друг относительно друга. Примером могут служить спутниковые системы дистанционных измерений, составленные из нескольких отдельных спутников, снабженных одинаковыми приборами. Каждый спутник движется по своей индивидуальной орбите, параметры которой отличаются от параметров другого спутника. В результате расстояния между спутниками постоянно меняются по определенным законам, что приводит к изменяющимся доплеровским сдвигам, которые к тому же различны для различных пар узлов антенной решетки. В настоящее время на орбитах Земли находится множество спутников со сходными программами наблюдений и типом датчиков, например, метеорологические спутники типа NOAA и Метеор, геостационарные спутники типа GOES, METEOSAT и т.п. Однако данные от различных спутников пока невозможно объединить в один интерферометрический набор данных, с помощью которого можно было бы исследовать не только частотные спектры волн в окружающем космическом пространстве, но и пространственные характеристики таких волн в форме пространственно-временных спектров. В настоящей работе обсуждаются вопросы создания такого метода оценивания пространственно-временных спектров, который бы позволил использовать данные от различных спутников Земли, находящихся на различных орбитах. Сначала мы в данной работе обсудим общие вопросы оценивания пространственно-временных спектров по данным, получаемым от движущихся узлов антенной решетки, а затем рассмотрим вопрос применения этого подхода к задачам обработки спутниковых данных.

1 Случай гармонических сигналов

В начале рассмотрим ситуацию, когда датчиками в узлах антенной решетки регистрируется гармонический сигнал, который в лабораторной системе отсчета имеет частоту ω и волновой вектор k. Предположим, что узлы антенной решетки движутся относительно лабораторной системы отсчета с постоянными скоростями V_a, $a=1,\ldots,M$, где индекс a соответствует номерам узлов антенной решетки, число которых равно M. В этом случае частоты измеряемого сигнала в узлах антенной решетки испытывают доплеровский сдвиг и равны соответственно:

$$\omega_a = \omega - (V_a, k). \tag{2}$$

Это соотношение в некотором смысле аналогично (1) . Из совокупности этих соотношений можно установить характеристики гармонического сигнала – его частоту относительно лабораторной системы отсчета и его волновой вектор при достаточном числе узлов антенной решетки. В случае трехмерного пространства для полного восстановления параметров сигнала достаточно иметь четыре узла антенной решетки. Систему уравнений (2) можно переписать в следующем виде:

$$(V_a - V_b, k) = \omega_a - \omega_b,\ a < b = 1,\ldots,M. \tag{3}$$

При $M=4$ имеется шесть пар уравнений, из которых только три любых уравнения этой системы линейно-независимы. Эти три уравнения и представляют собой систему уравнений для вычисления компонент волнового вектора $k=(k_x, k_y, k_z)$. Остальные три должны выполняться автоматически. Матрица системы (3) является невырожденной в случае, если все вектора V_a попарно неколлинеарны. Эти свойства аналогичны свойствам обычных фазовых антенных решеток относительно не скоростей узлов, а их радиус-векторов. Поэтому такие антенные решетки можно было бы назвать доплеровскими.

При наличии шума в сигнале и в приемной аппаратуре, как и для фазовых антенных решеток, условия согласованности измерений в отдельных узлах могут оказаться нарушенными. В этом случае каждая тройка уравнений (3) будет давать свою оценку волнового вектора, т.е. задача оценивания оказывается некорректной. В силу этого требуется построение корректного алгоритма, учитывающего шум в данных.

2 Ковариационная матрица для антенной решетки переменной конфигурации

Это означает, что в каждом элементе антенной решетки доплеровский сдвиг частот будет иметь различное значение. Кроме этого, сдвиги фаз между значениями гармонического сигнала, распространяющегося в неподвижной относительно лабораторной системы отсчета среде, в разных элементах антенной решетки будут меняться со временем. Возникает вопрос, можно ли в такой ситуации построить несмещенную и состоятельную оценку спектральной плотности для спектра в лабораторной системе отсчета.

Пусть изучаемый процесс в лабораторной системе отсчета может быть представлен в форме стационарного в широком смысле процесса $u(x,t)$, где x – декартовы координаты лабораторной системы отсчета, t – время. Условие стационарности в широком смысле означает, что

$$<u(x,t)>=a=\text{const},$$

$$<u(x,t)u(x',t')>=R(x-x',t-t').$$

Без ограничения общности будем полагать, что $a=0$. В силу сделанного предположения этот процесс можно представить в форме разложения в интеграл Фурье:

$$u(x,t)=\int a(k,\omega)e^{i(k,x)-i\omega t}dk^3d\omega,$$

где Фурье-компоненты процесса удовлетворяют условиям:

$$<a(k,\omega)>=0,\, S(k,\omega)\delta(k-k')\delta(\omega-\omega')=<a(k,\omega)a^*(k',\omega')>. \tag{4}$$

Функция $S(k,\omega)$ называется спектральной плотностью процесса.

Значения процесса, измеряемые датчиком в каждом узле с номером $a\,(a=1,\ldots,M)$ антенной решетки, который движется со скоростью V_a, будут даваться следующим преобразованием Галилея:

$$v_a(t)=u(x_a-V_at,t),\, a=1,\ldots,M.$$

Отсюда находим, что $v_a(t)$ – процессы, которые можно также представить в форме интегралов Фурье:

$$v_a(t)=\int a(k,\omega)e^{i(k,[x_a-V_at])-i\omega t}dk^3d\omega.$$

Взаимная корреляционная матричная функция этих процессов в этом случае будет иметь следующий вид:

$$R_{ab}(t,t')=<v_a(t)v_b(t')>=\iint<a(k,\omega)a^*(k',\omega')>\times$$

$$\times e^{i(k,[x_a-V_at])-i\omega t}e^{-i(k',[x_b-V_bt'])+i\omega' t'}dk^3d\omega dk^3d\omega'=\iint S(k,\omega)\delta(k-k')\times$$

$$\times\delta(\omega-\omega')e^{i(k,[x_a-V_at])-i\omega t}e^{-i(k',[x_b-V_bt'])+i\omega' t'}dk^3d\omega dk'^3d\omega'=$$

$$=\int S(k,\omega)e^{i(k,[(x_a-x_b)-(V_at-V_bt')]-i\omega(t-t')}dk^3d\omega. \tag{5}$$

Из этих соотношений следует, что процессы $v_a(t)$ не являются взаимно стационарными в широком смысле, поскольку их кросс-корреляционная матрица зависит не только от $t-t'$, но и от обоих моментов времени t и t'. Однако эта зависимость не слишком сложная, и мы можем ее использовать для построения новой оценки спектральной плотности $S(k,\omega)$. Например, дисперсии и средние всех процессов остаются независящими от времени.

3 Построение пространственно-временного спектра

Будем предполагать, что ковариационная матричная функция с компонентами $R_{ab}(t,t')$ может быть оценена с достаточной степенью точности. Тогда проблема построения $S(k,\omega)$ состоит, во-первых, в отыскании подходящей обратной к (5) формулы, выражающей $S(k)$ через $R_{ab}(t,t')$, а во-вторых, позволяющей подавлять шум в данных, что характерно для различных адаптивных методов построения спектральной оценки. К сожалению, в рассматриваемом случае нет возможности воспользоваться стандартными методами спектрального анализа, например, методом максимальной энтропии [4–7]. Это связано с тем, что между каждой парой узлов антенной решетки существует собственный доплеровский сдвиг. Поэтому взаимные спектры будут содержать доплеровский сдвиг, а автоспектры – нет. Поэтому мы воспользуемся методом компонент, который является разновидностью общего метода главных нормальных мод [8, 9].

Для этого рассмотрим задачу о собственных векторах и собственных числах ковариационной матричной функции. Собственные векторы $\xi_a^{(A)}(t)$ должны удовлетворять уравнению

$$\sum_{b=1}^{M}\int R_{ab}(t,t')\xi_b^{(A)}(t',\lambda)dt' = \lambda\xi_a^{(A)}(t,\lambda). \tag{6}$$

Верхний индекс A $A=1,\ldots,M$ у $\xi_a^{(A)}$ нумерует собственные вектора при фиксированном значении собственного числа λ. Матричное ядро этого интегрального уравнения, согласно общей теории интегральных уравнений Фредгольма, может быть представлено следующим образом:

$$R_{ab}(t,t') = \int\sum_{A=1}^{M}\lambda\xi_a^{(A)*}(t,\lambda)\xi_b^{(A)}(t',\lambda)d\lambda\ .$$

Используя (5), приходим к следующему уравнению:

$$\int S(k,\omega)e^{i(k,[(x_a-x_b)-(V_at-V_bt')]-i\omega(t-t')}dk^3d\omega = \int\sum_{A=1}^{M}\lambda\xi_a^{(A)*}(t,\lambda)\xi_b^{(A)}(t',\lambda)d\lambda.$$

Теперь левую часть уравнения (6) можно переписать следующим образом:

$$\sum_{b=1}^{M}\iint S(k',\omega')e^{i(k',[(x_a-x_b)-(V_at-V_bt')]-i\omega'(t-t')}dk'^3d\omega'\xi_b^{(A)}(t',\lambda)dt' =$$

$$= \iint S(k',\omega')e^{i(k',[x_a-V_at])-i\omega't}dk'^3d\omega'\sum_{b=1}^{M}e^{-i(k',x_b)+i[\omega'+(k',V_b)]t'}\xi_b^{(A)}(t',\lambda)dt'.$$

Ведем следующее обозначение:

$$\zeta^{(A)}(k,\omega,\lambda)=\int\sum_{b=1}^{M}e^{-i(k,x_b)+i[\omega+(k,V_b)]t'}\xi_b^{(A)}(t',\lambda)dt'=$$

$$=\sum_{b=1}^{M}e^{-i(k,x_b)}\int e^{i[\omega+(k,V_b)]t'}\xi_b^{(A)}(t',\lambda)dt'=\sum_{b=1}^{M}e^{-i(k,x_b)}g_b^{(A)}(\omega+(k,V_b),\lambda), \quad (7)$$

где $g_b^{(A)}(\omega,\lambda)=\int e^{i\omega t'}\xi_b^{(A)}(t',\lambda)dt'$.

Умножая (6) на множитель $e^{-i(k,x_a)+i[\omega'+(k,V_a)]t}$, затем суммируя по a и интегрируя по t, получаем следующее представление левой части (6):

$$\int S(k',\omega')\sum_{a=1}^{M}\int e^{i\{(k'-k),[x_a-V_a t]\}-i(\omega-\omega')t}dtdk'^3d\omega'\sum_{b=1}^{M}\int e^{-i(k',x_b)+i[\omega+(k',V_b)]t'}\times$$

$$\times\xi_b^{(A)}(t',\lambda)dt'=\int S(k',\omega')K(k'-k,\omega'-\omega)\zeta^{(A)}(k',\omega',\lambda)dk^2d\omega'.$$

В результате приходим к следующему интегральному уравнению для функций $\zeta^{(A)}(k,\omega,\lambda)$:

$$\int S(k',\omega')\Delta(k'-k,\omega'-\omega)\zeta^{(A)}(k',\omega',\lambda)dk^2d\omega'=\lambda\zeta^{(A)}(k,\omega,\lambda), \quad (8)$$

где $\Delta(k,\omega)=\sum_a e^{i(k,x_a)}\int e^{-i[(k,V_a)+\omega]t}dt=\sum_a e^{i(k,x_a)}\delta(\omega-(k,V_a))$.

Соотношение (8) является аналогом соотношения (4), определяющего свойства Фурье-компонент стационарного в широком смысле процесса. При этом в каком-то смысле суммирование по собственным числам λ матрицы ковариаций, оказывается эквивалентным математическому ожиданию. Мы постараемся использовать эту аналогию для построения оценок по методу максимальной энтропии.

Уравнение (8) представляет собой интегральное уравнение на собственные функции и собственные значения. При этом функции $\zeta(k,\omega,\lambda)$ являются собственными функциями для эрмитова ядра $S(k,\omega)\Delta(k'-k,\omega'-\omega)$. Следовательно, это ядро можно представить в следующем виде:

$$S(k,\omega)\Delta(k'-k,\omega'-\omega)=\sum_{A=1}^{M}\int\lambda\zeta^{(A)*}(k,\omega,\lambda)\zeta^{(A)}(k',\omega',\lambda)dV(\lambda). \quad (9)$$

Это соотношение и служит основой для построения оценок спектральной плотности $S(k,\omega)$.

4 Простая регуляризация

Уравнение (9) содержит в качестве множителя к оцениваемой функции $S(k,\omega)$ сингулярную функцию $\Delta(k,\omega)$. Это требует дополнительной регуляризации построений для нахождения завершенного алгоритма построения оценки. Во-первых, видно, что в точке $k=0$ функция $\Delta(k,\omega)$ имеет следующий вид:

$$\Delta(0,\omega)=M\delta(\omega),$$

где M – число элементов антенной решетки.

Таким образом, вместо (9) имеем

$$S(k,\omega)\delta(\omega-\omega')=\frac{1}{M}\sum_{A=1}^{M}\int\lambda\zeta^{(A)*}(k,\omega,\lambda)\zeta^{(A)}(k,\omega',\lambda)dV(\lambda). \qquad (10)$$

Левая часть этого соотношения уже в точности совпадает с левой частью соотношения (4). Однако существенным отличием данного соотношения от (4) является то, что операция усреднения по ансамблю в (10) здесь скрыта в собственных векторах $\zeta^{(A)}(k,\omega',\lambda)$.

В выражении (10) δ-функция слева возникает по причине ортогональности собственных функций $\zeta^{(A)}(k,\omega',\lambda)$ отвечающих различным собственным числам, в то время как в (4) эта функция возникает как следствие свойств Фурье-образов стационарного в широком смысле процесса. Однако формальное сходство левых частей (10) и (4) можно использовать для регуляризации оценок на основе данной формулы. Именно, если предположить, что комплексные процессы по t

$$\chi^{(A)}(k,t,\lambda)=\sum_{b=1}^{M}e^{-i\left(k,x_b-V_bt\right)}\xi_b^{(A)}(t,\lambda) \qquad (11)$$

сами являются случайными стационарными в широком смысле процессами при каждом k, A и λ, то в этом случае имеет место стандартная теорема Винера-Хинтчина:

$$<\zeta^{(A)*}(k,\omega,\lambda)\zeta^{(A)}(k,\omega',\lambda)>=S^{(A)}(k,\omega,\lambda)\delta(\omega-\omega'), \qquad (12)$$

где $S^{(A)}(k,\omega,\lambda)$ – спектральные плотности процессов $\chi^{(A)}(k,t,\lambda)$.

Подставляя (12) в (10) и сравнивая правую и левую части, в результате получаем

$$S(k,\omega)=\frac{1}{M}\sum_{A=1}^{M}\int\lambda S^{(A)}(k,\omega,\lambda)dV(\lambda). \qquad (13)$$

Это означает, что для построения спектральной плотности исследуемого процесса необходимо вычислить спектральную плотность отдельных одномерных случайных процессов (11) при каждом A, λ и k, которые являются линейными комбинациями собственных вектор-функций ковариационной матричной функции. Сумма таких спектральных плотностей по всем собственным числам матрицы ковариаций при заданном волновом числе k и будет окончательной формулой для спектральной плотности исходного процесса. Поскольку полученные соотношения являются точными при условии стационарности в широком смысле исходного поля $u(x,t)$ и постоянства V_a, то формально усреднение в (12) излишне. Однако при использовании этого подхода для построения оценок спектральной плотности по реальным данным такое усреднение необходимо в силу появления дополнительной стохастичности собственных векторов матрицы, связанной с шумом в приемниках, ограниченностью выборки, флуктуациями скоростей датчиков и ошибками округления при вычислениях.

5 Переход к дискретным рядам

Рассмотрим теперь дискретный аналог полученных оценок. В случае дискретных рядов с шагом по времени Δt матрица ковариаций может быть представлена в следующем виде:

$$R_{ab}^{nm} = R_{ab}(n\Delta t, m\Delta t), n, m = 0, \ldots, L,$$

где L – число шагов по времени, для которых оценена матрица ковариций.

В результате соотношение (5) можно переписать так:

$$R_{ab}^{nm} = \int_{-1/2}^{1/2} \int S(k,f) e^{i(k,)\left[(x_a - x_b) - \Delta t(V_a n - V_b m)\right] - i2\pi f(n-m)/L} dk^3 df, \quad (14)$$

где $f = \omega\Delta t/(4\pi(L+1))$ – нормированная безразмерная частота; значения $f_n = \pm 1/2$ соответствуют частоте Найквиста дискретного процесса.

Уравнения на собственные вектора этой матрицы можно записать в следующем виде:

$$\sum_{b=1}^{M} \sum_{m=0}^{L} R_{ab}^{nm} \xi_{m,b}^{(A)}(q) = \lambda_{A,q} \xi_{m,a}^{(A)}(q). \quad (15)$$

Для удобства вычислений R_{ab}^{nm} можно представить как квадратную матрицу размерности $M \times (L+1)$, состоящую из блоков. Блоки нумеруются индексами $a, b = 1, \ldots, M$, а нумерация элементов внутри блоков – индексами n, m. В этом случае (15) не отличается от задачи на собственные вектора полученной симметричной положительно определенной квадратной матрицы R. Согласно общим свойствам этой матрицы имеем

$$R_{ab}^{nm} = \sum_{A,q} \lambda_{A,q} \xi_{n,a}^{(A)}(q) \xi_{m,b}^{(A)}(q).$$

Подставляя (14) в (15), затем умножая полученное соотношение на $e^{-i(k,x_a)+i[2\pi f+(k,V_a)\Delta t]n/L}$, суммируя по a и суммируя по l, получаем аналог соотношения (8):

$$\int_{-1/2}^{1/2} \int S(k', f')\Delta(k' - k, \omega' - \omega)\zeta^{(A,q)}(k', f')dk^2 df' = \lambda_{A,q}\zeta^{(A,q)}(k, \omega),$$

где

$$\zeta^{(A,q)}(k,f)=\sum_{n=0}^{L}\left[\sum_{a=1}^{M}\xi_{m,b}^{(A)}(q)e^{-i(k,x_a)+\Delta t(k,V_a)n/L}\right]e^{2i\pi fn/L};$$

$$\Delta(k,f)=\sum_{n=0}^{L}\left[\sum_{a=1}^{M}e^{i(k,x_a)-i\Delta t(k,V_a)n/L}\right]e^{-2i\pi fn/L}.$$

Поскольку ядро этого интегрального уравнения эрмитово, то имеет место соотношение

$$S(k',f')\Delta(k'-k,\omega'-\omega)=\sum_{A,q}\lambda_{A,q}\zeta^{(A,q)*}(k',f')\zeta^{(A,q)}(k,f).$$

При $k=k'$ и $f=f'$

$$\Delta(0,0)=ML.$$

В результате окончательно находим:

$$S(k,f)=\frac{1}{ML}\sum_{A,q}\lambda_{A,q}\zeta^{(A,q)*}(k,f)\zeta^{(A,q)}(k,f). \quad (16)$$

Используя идею дополнительного усреднения, эту формулу по аналогии с (13) можно представить в виде

$$S(k,f)=\frac{1}{ML}\sum_{A,q}\lambda_{A,q}<|\zeta^{(A,q)}(k,f)|^2>=\frac{1}{ML}\sum_{A,q}\lambda_{A,q}S(A,q)(k,f). \quad (17)$$

6 Алгоритм построения оценки

Основная трудность при реализации рассмотренного подхода к построению оценки $\widehat{S}(k,f)$ спектральной плотности на основе конечных рядов измерений состоит в отыскании достаточно надежной оценки матрицы ковариаций $\widehat{R}_{ab}^{m,n}$ на достаточно большом количестве временных сдвигов. Для этого можно воспользоваться естественным методом оценивания ковариаций с временным усреднением на основе последовательности отрезков фиксированной длины исходных рядов с началом, смещенным на одинаковое число временных отсчетов. Такого рода процедуры применялись ранее в задачах отыскания нестационарностей в рядах измерений (см., например, [10]).

Алгоритм вычисления оценки $\widehat{S}(k,f)$ на основе соотношения (17) должен состоять из следующих этапов:

1) построение оценки матрицы ковариаций $\widehat{R}_{ab}^{m,n}$ по дискретному набору синхронных данных для узлов антенной решетки;

2) вычисление собственных векторов и собственных чисел матрицы ковариаций;

3) вычисление оценок Фурье-преобразования $\widehat{\zeta}^{A,q}(k,f)$ собственных векторов матрицы ковариаций;

4) построение собственно оценки $\widehat{S}(k,f)$ на основе соотношения (17).

Построение оценки матрицы ковариаций $\widehat{R}_{ab}^{m,n}$ может быть проведено с заменой осреднения по ансамблю осреднением по времени, а именно, пусть $x_i^{(a)}$, $i=1,...,N$, $a=1,...,M$ – набор данных от M узлов антенной решетки в равноотстоящие синхронные моменты времени $t_n = n\Delta t$. Для каждого узла антенной решетки из ряда $x_i^{(a)}$ создаем набор из $(L+1)$ рядов длинной $N_1 = N - L$ по правилу [10]:

$$u_{i,n}^{(a)} = x_{i+n}^{(a)} - X_n^{(a)},\, n = 0,\ldots,L;\, i = 0,\ldots,N-L,$$

где

$$X_n^{(a)} = \frac{1}{N-L+1}\sum_{i=0}^{N-L} x_{i+n}^{(a)}$$

представляют собой средние значения отдельных отрезков исходного ряда.

Тогда оценка матрицы ковариаций строится по формуле

$$\widehat{R}_{n,m}^{ab} = \frac{1}{N-L}\sum_{i=0}^{N-L} u_{i,n}^{(a)} u_{i,m}^{(b)}. \tag{18}$$

Оценку ковариационной матрицы $\widehat{R}_{n,m}^{ab}$ можно представить в виде квадратной симметричной блочной матрицы R размером $K \times K$, где $K = (L \times M)$:

$$R = \begin{pmatrix} \widehat{R}_{11} & \widehat{R}_{12} & \cdots & \widehat{R}_{1L} \\ \widehat{R}_{21} & \widehat{R}_{22} & \cdots & \widehat{R}_{2L} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \widehat{R}_{L1} & \widehat{R}_{L2} & \cdots & \widehat{R}_{LL} \end{pmatrix}, \tag{19}$$

здесь блоки $\widehat{R}_{nm}$ являются матрицами размерности $M \times M$.

Решая задачу на собственные числа и собственные значения этой матрицы

$$R\xi^{\mu} = \lambda_{(\mu)}\xi^{\mu},\, \mu = 1,\ldots,K,$$

получаем собственные вектора этой матрицы в виде векторов размерности K с компонентами:

$$\xi^{\mu} = \mathrm{column}\{\xi_1^{\mu},\ldots,\xi_M^{\mu},\xi_{M+1}^{\mu},\ldots,\xi_{2M}^{\mu},\ldots,\xi_{(L-1)M+1}^{\mu},\ldots,\xi_{LM}^{\mu}\}.$$

Функция $\zeta^{\mu}(k,f)$ вычисляется следующим образом:

$$\zeta^{\mu}(k,f) = \sum_{j=0}^{L}\left[\sum_{a=1}^{M}\xi_{jM+a}^{\mu} e^{-i(k,x_a)+\Delta t(k,V_a)\,j/L}\right] e^{2i\pi fj/L}.$$

Окончательно оценка спектральной плотности вычисляется по формуле

$$\widehat{S}(k,f)=\frac{1}{ML}\sum_{\mu=1}^{K}\lambda_{(\mu)}Б\,\zeta^{(\mu)*}(k,f)\zeta^{(\mu)}(k,f)>=\frac{1}{ML}\sum_{\mu=1}^{K}\lambda_{(\mu)}<|\,\zeta^{(\mu)}(k,f)\,|^{2}>.$$

Для построения оценки спектральных плотностей

$$\widehat{S}^{(\mu)}(k,f)=<|\,\zeta^{(\mu)}(k,f)\,|^{2}>$$

можно воспользоваться хорошо развитыми методами оценивания спектральной плотности временных рядов на основе методов максимальной энтропии или любым другим аналогичным методом (см. [3, 4, 6, 8] и библиографию).

Заключение

Предложенный метод дает реальную возможность построения оценок спектральной плотности исходного волнового процесса на основе данных от датчиков, движущихся друг относительно друга с постоянными скоростями. Как было показано, такая процедура опирается на три основных предположения. Первое предположение касается требования стационарности в широком смысле исходного процесса, что является вполне естественным для методов спектрального оценивания. Второе предположение касается требования детерминированности или хотя бы стационарности в широком смысле вспомогательных процессов $\chi^{A}(k,t,\lambda)$. Это предположение требует дополнительного изучения, однако можно надеяться, что оно будет иметь место для широкого класса исходных процессов. Последнее предположение состоит в том, что с помощью конечных рядов можно построить удовлетворительную оценку матрицы ковариаций $R_{ab}(m,n)$. Последнее определяется свойствами исходных рядов измерений и требует изучения в каждом конкретном случае. В целом рассмотренные требования относятся к стандартным требованиям, которые накладываются на временные ряды измерений при спектральном оценивании. Из этого можно сделать вывод, что метод будет работать в достаточно общем классе условий и задач. Однако в силу определенных новых особенностей метода, которые не характерны для обычного метода оценивания спектральной плотности, например связанных с непрерывным изменением баз решетки и ее аппертуры, требуется определенная работа по выяснению ее разрешающей способности. Последнее можно выяснить на тестовых задачах, что выходит за рамки данной работы.

В заключение отметим, что наиболее перспективной областью применения данного подхода является исследование волновых процессов в космическом пространстве на основе данных, поступающих с совокупности датчиков различных космических аппаратов. В настоящее время имеется уже несколько спутниковых кластеров, данные от которых можно обрабатывать предложенным способом.

Список литературы

1. **Кейпон, Д.** Пространсвенно-временной спектральный анализ с высоким разрешением / Д. Кейпон // ТИИЭР. – 1969. – Т. 51. – С. 69–79.
2. **Джонсон, Д. Х.** Применение методов спектрального анализа к задаче определения угловых координат источников излучений / Д. Х. Джонсон //

ТИИЭР. – 1982. – Т. 70. – № 9. – С. 126–139.
3. **Бендат, Дж.** Применения корреляционного и спектрального анализа / Дж. Бендат, А. Пирсол. – М. : Мир, 1983.
4. **Burg, J. P.** Maximum entropy spectral analysis / J. P. Burg // In proc. 37-th Meet. Society of Exploration Geophysisists. – Oklahoma city, 1967. – Oct. 31.
5. **Стратанович, Р. Л.** Теория информации / Р. Л. Стратанович. – М. : Сов. радио, 1975. – 424 с.
6. **Дворянинов, Г. С.** Метод максимальной энтропии в многомерном спектральном анализе. Ч. 1, 2 / Г. С. Дворянинов, В. М. Журавлев, А. В. Прусов. – Препринт МГИ АН УССР, 1987.
7. **Дворянинов, Г. С.** Метод максимальной энтропии в многомерном спектральном анализе временных рядов / Г. С. Дворянинов, В. М. Журавлев, А. В. Прусов // Морской гидрофизический журнал. – 1987. – № 3. – С. 41–48.
8. **Марпл (мл.) С. Л.** Цифровой спектральный анализ и его приложения / С. Л. Марпл (мл.). – М. : Мир, 1990.
9. **Дворянинов, Г. С.** Методы максимальной энтропии и комплексных нормальных мод для многомерного и прстранственно-временного спектрального анализа / Г. С. Дворянинов, В. М. Журавлев, Е. М. Лемешко, А. В. Прусов // Моделир. гидрофиз. процессов и полей в замкнутых водоемах и морях / под ред. А. С. Саркисяна. – М. : Наука, 1987. – С. 213–228.
10. **Takens, F.** Lect. Notes in Math. / F. Takens. – Berlin : Springer, 1981. – V. 898. – P. 336–381.

Журавлев Виктор Михайлович
доктор физико-математических наук, профессор, кафедра теоретической физики, Ульяновский государственный университет

E-mail: zhvictorm@gmail.com

Zhuravlev Victor Mikhaylovich
Doctor of physico-mathematical sciences, professor, sub-department of theoretical physics, Ulyanovsk State Univbersity

Фундаев Сергей Валерьевич
аспирант, Ульяновский государственный университет

E-mail: zhvictorm@gmail.com

Fundaev Sergey Valeryevich
Post graduate student, Ulyanovsk State University

УДК 52-17:519.254
Журавлев, В. М.
Вычисление спектральной плотности сигнала с помощью антенной решетки переменной конфигурации / В. М. Журавлев, С. В. Фундаев // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2009. – № 3 (11). – С. 101–112.